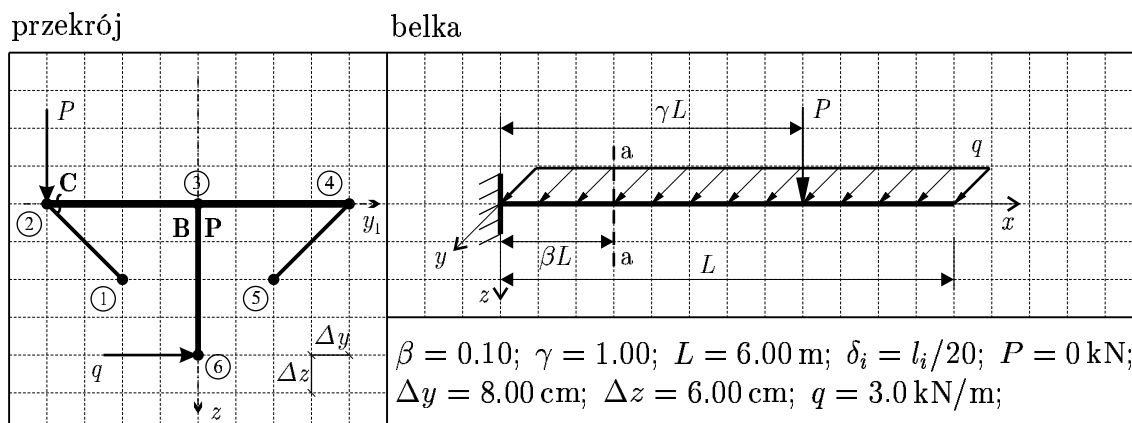


Przykład do zadania 5.

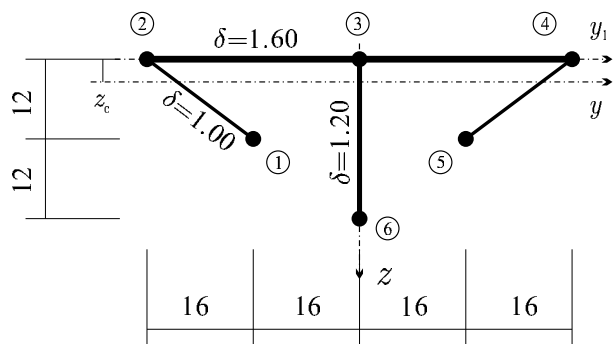
Dla pręta cienkościennego pokazanego na rysunku:

- wyznaczyć charakterystyki geometryczne: I_y, I_z, K_s, I_ω oraz $\bar{S}_y, \bar{S}_z, \bar{S}_\omega$ w punkcie C,
- sporządzić wykresy sił przekrojowych: $M_y, M_z, T_y, T_z, M_s, M_\omega$ i B,
- w przekroju a-a obliczyć naprężenie normalne σ w punkcie 5 i naprężenie styczne τ w punkcie C; naszkicować rozkład naprężenia τ na grubości ścianki w punkcie C.



1. Charakterystyki geometryczne

1.1. Środek ciężkości

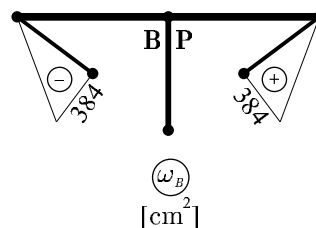
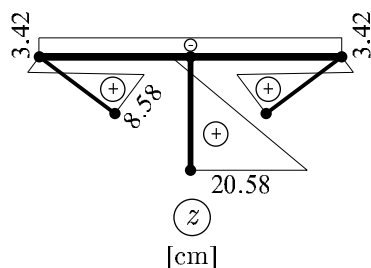
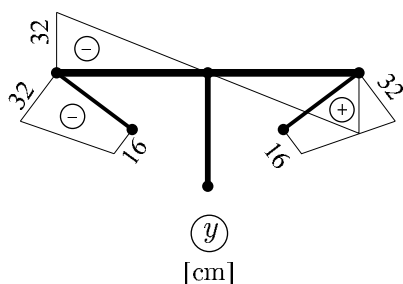


$$A = 2 \cdot 20 \cdot 1 + 2 \cdot 32 \cdot 1.60 + 24 \cdot 1.20 = 171.2 \text{ cm}^2$$

$$S_{y1} = 2 \cdot 20 \cdot 1 \cdot 6 + 24 \cdot 1.2 \cdot 12 = 585.6 \text{ cm}^3$$

$$z_c = \frac{S_{y1}}{A} = \frac{585.6}{171.2} = 3.42 \text{ cm}$$

1.2. Wykresy współrzędnych



1.3. Momenty bezwładności

$$I_y = \int_A z^2 dA = 2 \left\{ 1.0 \cdot \frac{20}{6} [2 (8.58^2 + (-3.42)^2) - 2 \cdot 3.42 \cdot 8.58] \right\} +$$

$$+ 1.6 \cdot 64 \cdot (-3.42)^2 + 1.2 \cdot \frac{24}{6} [2 (20.58^2 + (-3.42)^2) - 2 \cdot 3.42 \cdot 20.58] = 5\,446.5 \text{ cm}^4$$

$$I_z = \int_A y^2 dA = 2 \left\{ 1.0 \cdot \frac{20}{6} [2 (16^2 + 32^2) + 2 \cdot 16 \cdot 32] + 1.6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 32^2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 32 \right\} =$$

$$= 58\,845.867 \text{ cm}^4$$

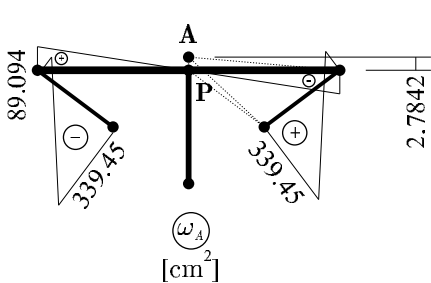
$$I_{\omega_{By}} = \int_A \omega_{By} dA = 2 \left\{ 1.0 \cdot \frac{20}{6} [2 (384 \cdot 16 + 0) + 384 \cdot 32] \right\} = 163\,840 \text{ cm}^5$$

$$K_s = \frac{1}{3} \sum_i l_i \delta_i^3 = \frac{1}{3} (2 \cdot 20 \cdot 1^3 + 2 \cdot 32 \cdot 1.6^3 + 24 \cdot 1.2^3) = 114.53867 \text{ cm}^4$$

1.4. Główny biegun wycinkowy

$$z_A = z_B - \frac{I_{\omega_{By}}}{I_z} = -3.42 - \frac{163\,840}{58\,845.867} = -3.42 - 2.7842 = -6.204 \text{ cm}$$

1.5. Główna współrzędna wycinkowa



$$\omega_4 = -2.7842 \cdot 32 = -89.0944 \text{ cm}^2$$

$$\omega_5 = \omega_4 + 2 \left(\frac{1}{2} \cdot 2.7842 \cdot 32 + \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 12 - \frac{1}{2} \cdot 2.7842 \cdot 16 \right) =$$

$$= 339.4528 \text{ cm}^2$$

1.6. Główny wycinkowy moment bezwładności

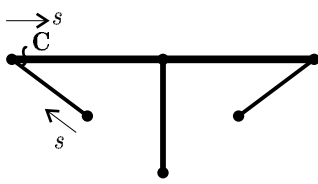
$$I_\omega = \int_A \omega_A^2 dA = 2 \left\{ 1.0 \cdot \frac{20}{6} [2 (339.4528^2 + (-89.0944)^2) - 2 \cdot 339.4528 \cdot 89.0944] + \right.$$

$$\left. + 1.6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 32 \cdot 89.0944 \cdot \frac{2}{3} \cdot 89.0944 \right\} = 1\,509\,912.947 \text{ cm}^6$$

1.7. Współczynnik giętno-skrętny

$$\alpha = \sqrt{\frac{GK_s}{EI_\omega}} = \sqrt{0.4 \cdot \frac{K_s}{I_\omega}} = \sqrt{0.4 \cdot \frac{114.53867}{1\,509\,912.947}} = 5.50846 \cdot 10^{-3} \frac{1}{\text{cm}} = 0.550846 \frac{1}{\text{m}}$$

1.8. Momenty statyczne odciętej części przekroju w punkcie C



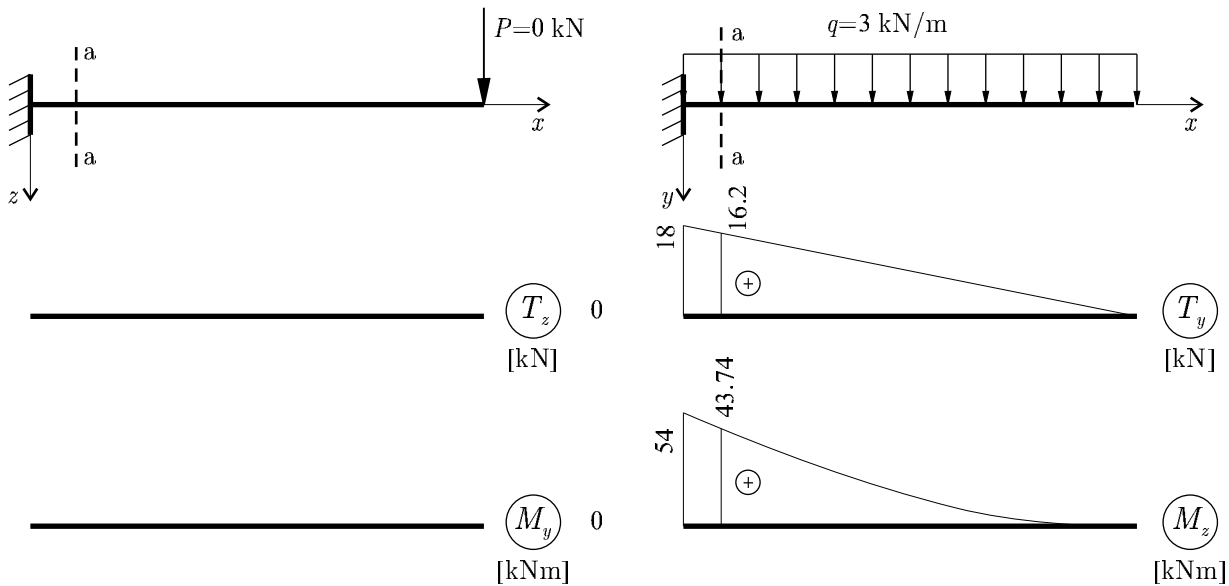
$$\bar{S}_y = \int_{\bar{A}} z dA = 1.0 \cdot \frac{8.58 + (-3.42)}{2} \cdot 20 = 51.6 \text{ cm}^3$$

$$\bar{S}_z = \int_{\bar{A}} y dA = 1.0 \cdot \frac{-16 + (-32)}{2} \cdot 20 = -480 \text{ cm}^3$$

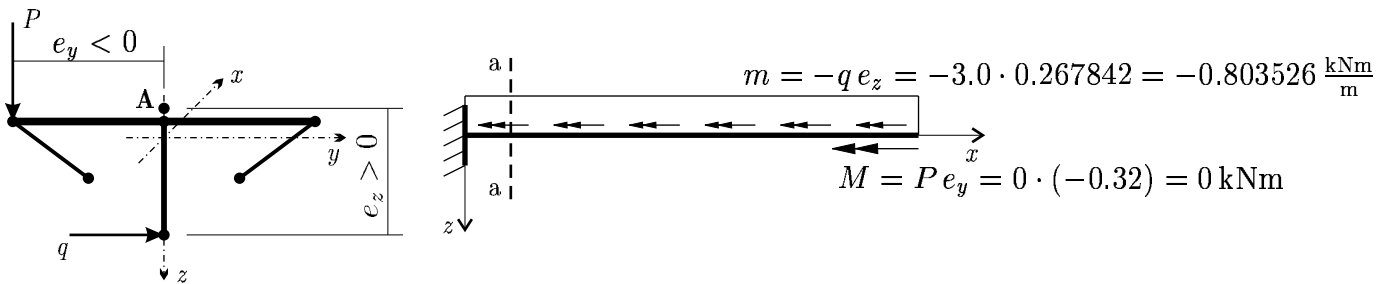
$$\bar{S}_\omega = \int_{\bar{A}} \omega_A dA = 1.0 \cdot \frac{-339.4528 + 89.0944}{2} \cdot 20 = -2503.584 \text{ cm}^4$$

2. Siły wewnętrzne

2.1. Siły tnące i momenty zginające



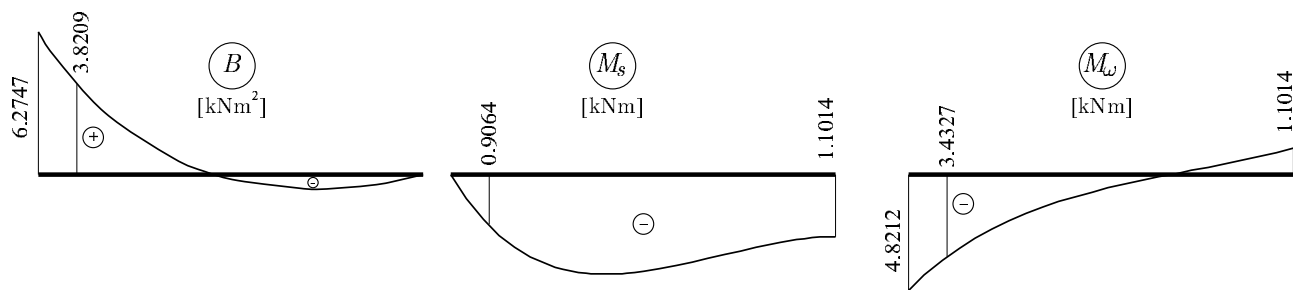
2.2. Siły pochodzące od skręcania pręta cienkościennego



$$B(x) = -EI_\omega \Theta'' = -\frac{m}{\alpha^2 \cosh(\alpha L)} [\alpha L \sinh(\alpha(L-x)) - \cosh(\alpha L) + \cosh(\alpha x)]$$

$$M_s(x) = GK_s \Theta' = \frac{m}{\alpha \cosh(\alpha L)} [\alpha(L-x) \cosh(\alpha L) + \sinh(\alpha x) - \alpha L \cosh(\alpha(L-x))]$$

$$M_\omega(x) = -EI_\omega \Theta''' = \frac{m}{\alpha \cosh(\alpha L)} [\alpha L \cosh(\alpha(L-x)) - \sinh(\alpha x)]$$



3. Naprężenia

3.1. Naprężenia normalne w punkcie 5

$$\begin{aligned} \sigma &= \frac{M_y z}{I_y} - \frac{M_z y}{I_z} + \frac{B \omega}{I_\omega} = 0 - \frac{43.74 \cdot 10^{-3} \cdot 16 \cdot 10^{-2}}{58\,845.867 \cdot 10^{-8}} + \frac{3.8209 \cdot 10^{-3} \cdot (339.45) \cdot 10^{-4}}{1\,509\,912.947 \cdot 10^{-12}} = \\ &= 0 - 11.893 + 85.899 = 74.006 \text{ MPa} \end{aligned}$$

3.2. Naprężenia styczne w punkcie C

$$\begin{aligned} \tau_M + \tau_\omega &= -\frac{1}{\delta} \left[\frac{T_z \bar{S}_y}{I_y} + \frac{T_y \bar{S}_z}{I_z} + \frac{M_\omega \bar{S}_\omega}{I_\omega} \right] = \\ &= -\frac{1}{0.016} \left[0 + \frac{16.2 \cdot 10^{-3} \cdot (-480) \cdot 10^{-6}}{58\,845.867 \cdot 10^{-8}} + \frac{-3.4327 \cdot 10^{-3} \cdot (-2503.584) \cdot 10^{-8}}{1\,509\,912.947 \cdot 10^{-12}} \right] = \\ &= 0 + 0.826 - 3.557 = -2.731 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\tau_s = \frac{M_s \delta}{K_s} = \frac{-0.9064 \cdot 10^{-3} \cdot 0.016}{114.54 \cdot 10^{-8}} = -12.661 \text{ MPa}$$

