Metoda Elementów Skończonych

POJĘCIA PODSTAWOWE METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

1

2

Wiadomości ogólne

- Metoda elementów skończonych znajduje zastosowanie w rozwiązywaniu zadań z wielu dziedzin nauki i techniki. Początki metody jako techniki matematycznej rozwiązywania równań różniczkowych cząstkowych można odnieść do pracy COURANTA R. z 1943 roku. Matematyczne podstawy teoretyczne odnaleźć można w pracach GALERKINA B. G i RITZA W. Zastosowania w dziedzinie mechaniki ośrodków ciągłych spowodowały szeroki rozwój metody.

3

Krótka historia metody

- 1943 → Courant (metody wariacyjne)
- 1956 → Turner, Clough, Martin and Topp (sztywność)
- 1960 → Clough ("Finite Element", zadania płaskie)
- 70te → Systemy obliczeniowe na duże komputery
- 80te → Mikrokomputery, pre- i postprocesory
- 90te → Analiza dużych układów konstrukcyjnych

4

Wiadomości ogólne

W chwili obecnej metoda jest z powodzeniem wykorzystywana w zagadnieniach mechaniki ciał odkształcalnych, mechaniki płynów, w analizie przewodnictwa cieplnego, w wibroakustyce czy analizie różnego typu pól. Czyli we wszystkich zagadnieniach, które możemy opisać poprzez równania różniczkowe wraz z odpowiednimi warunkami brzegowymi (ZIENKIEWICZ O.C., TAYLOR R.L.).

5

- Tak więc zadanie formułowane jest następująco: szukamy nieznanych funkcji **u** spełniających opisujący układ równań różniczkowych, lub w szczególności jedno równanie

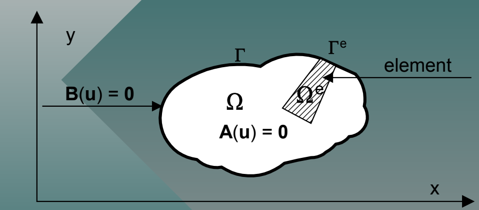
6

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

- w zadanym obszarze Ω wraz z warunkami brzegowymi

$$\mathbf{B}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} B_1(\mathbf{u}) \\ B_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{Bmatrix} = \mathbf{0}$$

- na granicach tego obszaru Γ



Rozpatrywany obszar Ω i granica Γ

Szukane funkcje mogą być funkcjami skalarnymi, wektorowymi lub przedstawiać kilka funkcji.

- Metoda elementów skończonych dostarcza ogólnego schematu postępowania w celu konstruowania szukanych funkcji poprzez przyjęcie postaci aproksymacyjnej

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{1}^{n} \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N}\mathbf{a}$$

gdzie $\mathbf{N}_i$ są tzw. funkcjami kształtu które określone są w układzie lokalnym elementu lub podobszaru, $\mathbf{a}_i$ są natomiast parametrami węzłowymi, w większości nieznanymi.

Aproksymacja w elemencie

Dwa sformułowania:

- *metoda residuów ważonych* (sformułowanie "słabe") - metoda Galerkina,
- *funkcjonał wariacyjny problemu* (sformułowanie "silne") - metoda Rayleigha-Ritza

Ogólny algorytm metody elementów skończonych

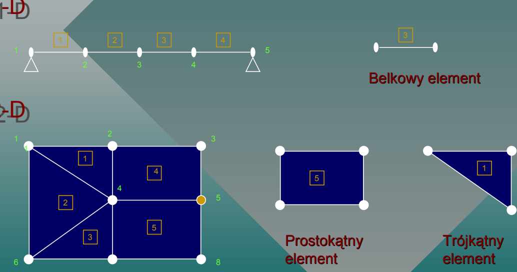
1

W pierwszym etapie metody następuje podział wnętrza i brzegu obszaru rozwiązania na skończoną liczbę podobszarów zwanych elementami skończonymi. Podział obszaru na elementy nazywamy *procesem idealizacji* geometrii układu. Przeważnie na tym etapie upraszcza się kształt rozważanego obszaru.

Przykłady typów elementów

1-D

2-D



Ogólny algorytm metody elementów skończonych

2

Analiza poszczególnych *elementów*.
Z analizy na poziomie elementu uzyskuje się związek między oddziaływaniami w węzłach a parametrami tych węzłów.
W wyniku tego procesu tworzy się macierz zwaną *macierzą sztywności* elementu skończonego, której składnikami są oddziaływania w więzach od parametrów jednostkowych kolejnych więzów.

13

Macierz sztywności elementu

$$\mathbf{K}^e \mathbf{a}^e = \mathbf{r}^e$$

- $\mathbf{K}^e$ - macierz sztywności elementu o wymiarze *n x n*,
- $\mathbf{a}^e$ - wektor o wymiarze *n* x 1, składowymi którego są parametry węzłowe elementu
- $\mathbf{r}^e$ - wektor w wymiarze *n* x 1, składowymi którego są oddziaływania w węzłach elementu.

14

Analiza elementu

Analiza elementu, czyli uzyskanie macierzy sztywności jest stosunkowo złożonym problemem MES-u. Pojawia się tu szereg problemów. Przede wszystkim w wyniku podziału obszaru na elementy i założenia, że połączone są one w skończonej liczbie węzłów, następuje naruszenie ciągłości odkształceń wzdłuż linii podziału.

15

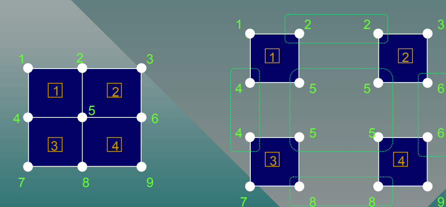
Ogólny algorytm metody elementów skończonych

3 *Analiza układu.* Etap ten polega na zszywaniu poszczególnych elementów w całość, z której zostały wydzielone. Wykorzystuje się przy tym warunki zgodności i równowagi węzłów.

W efekcie otrzymujemy układ równań

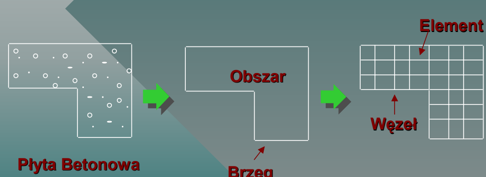
16

Agregacja elementów



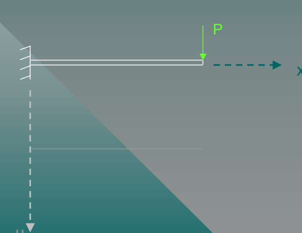
17

Dyskretyzacja



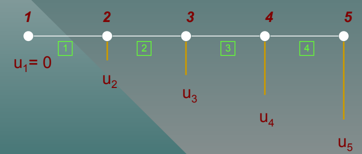
18

Przykład



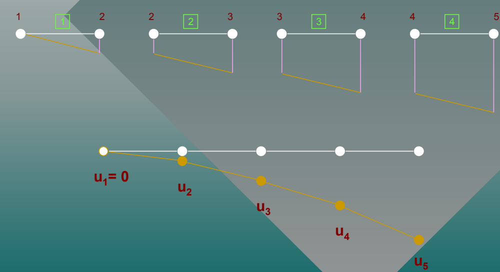
19

Siatka elementów



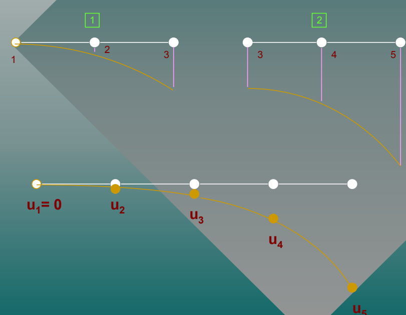
20

Dyskretyzacja liniowa



21

Dyskretyzacja kwadratowa



22

Macierz sztywności układu

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{r}$$

- **K** - macierz kwadratowa zwana macierzą sztywności układu,
- **a** - wektor, którego składowymi są niewiadome parametry węzłowe
- **r** - wektor, którego składowymi są obciążenia węzłowe.

Wymiary **K**, **a**, **r** zależą od liczby węzłów w układzie i liczby składowych parametrów węzłowych.

23

Równowaga elementu

Dla opisu stanu równowagi elementu przyjmuje się skończoną liczbę parametrów, mimo że w przypadku elementu wyciętego z kontinuum parametrów jest nieskończenie wiele. Dlatego też metoda elementów skończonych jest metodą przybliżoną, aproksymacyjną. Powstaje pytanie, czy dokładność metody jest dostateczna, i od czego ona zależy?

24

Wymagania przy budowie elementu

- Warunek zgodności:
  - a) ciągłość pola przemieszczeń
- Warunki zupełności:
  - a) opis w elemencie pola stałych przemieszczeń
  - b) brak odkształceń przy sztywnych ruchach elementu

26

Dokładność metody

Ogólnie można powiedzieć, że dokładność metody jest tym większa im:

- założone funkcje dokładniej opisują rzeczywisty rozkład pola elementu
- podział na elementy jest bardziej gęsty

27

Spełnienie tylko drugiego warunku nie jest wystarczające do uzyskania poprawnych wyników. Kluczowy jest dobór funkcji interpolacyjnych opisujących stan odkształcenia elementu w zależności od wartości przemieszczeń węzłowych. Funkcje te określa się w MESie mianem

funkcji kształtu

28

Funkcje kształtu

Przyjmując funkcje kształtu należy dążyć do spełnienia następujących warunków:

1. funkcje opisujące pole funkcji rozwiązującej powinny gwarantować ich ciągłość wewnątrz elementu oraz zgodność (do rzędu o jeden rząd mniejszy niż rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu całkowym) na granicy podziału - w elementach sąsiednich

29

2. funkcje muszą zapewniać możliwość realizacji stałej wartości funkcji rozwiązującej lub jej pochodnych (do rzędu o jeden rząd mniejszy niż rząd najwyższej pochodnej występującej w równaniu całkowym) wewnątrz elementu, co uwzględnia oczywisty fakt, że wraz ze zmniejszaniem się wymiarów elementu, wartość funkcji rozwiązującej zmierza do pewnej stałej wartości.

30

Funkcje kształtu

Spełnienie powyższych warunków zapewnia na ogół monotoniczną zbieżność poszukiwanego rozwiązania, do rozwiązania dokładnego, w miarę zwiększania liczby elementów przy jednoczesnym zmniejszaniu ich objętości

Właściwy dobór funkcji kształtu jest zagadnieniem o podstawowym znaczeniu w analizie elementu.